

第五章 更新定理

- 1 基本定义
 - 定义
 - 大数律的推论
- 2 $N(t)$ 的分布与更新函数
 - $N(t)$ 的分布
 - 更新函数
- 3 极限定理与停时
 - 极限定理
 - 停时
 - 基本更新定理



第一节 基本定义

定义 5.1.1

设 $\{X_n, n \geq 1\}$ 为独立同分布的非负随机变量序列, 定义

$$S_0 \equiv 0, S_n := \sum_{i=1}^n X_i, \quad (n \geq 1),$$

$$N(t) := \sup\{n : S_n \leq t\} \left(= \sum_{n=1}^{\infty} 1_{\{S_n \leq t\}} \right) : (0, t] \text{ 的更新次数.}$$

则称 $\{N(t), t \geq 0\}$ 为更新过程.

X_n : 第 $n-1$ 个事件与第 n 个事件的时间间隔,

S_n : 第 n 个事件的到达时间.



例 5.1.1 (更新机器零件问题)

某机器上有一个零件是易损件且一旦它损坏就要马上换新.
设 $\{X_n\}$ 为第 n 个零件的寿命, 则对于 $t \geq 0$,

$$N(t) = \sup\{n > 0 : S_n \leq t\}$$

为时刻 t 为止更换的零件数.

此计数过程 $\{N(t), t \geq 0\}$ 即为一更新过程.



假设:

设 X_n 共同的分布函数为 F 满足:

$$F(0) = \mathbb{P}(X_n = 0) < 1.$$

此时,

$$0 < \mu \equiv \mathbb{E}X_n \leq \infty.$$

注. 如果 X_1 服从参数为 λ 的指数分布, 则 $\{N(t), t \geq 0\}$ 是速率为 λ 的 Poisson 过程.



注释.

- ① 由强大数律可知: 当 n 充分大时,

$$\frac{S_n}{n} \rightarrow \mu \quad \text{a.s.}$$

所以由 $\mu > 0$, 当 n 充分大时, $S_n \xrightarrow{\text{a.s.}} \infty$.

- ② 在有限的时间内, $N(t)$ 取有限值, 也就是说, 至多只有有限个 n 值使得 $S_n \leq t$: 对 $\forall t > 0$,

$$N(t) = \max\{n > 0 : S_n \leq t\} < \infty$$

- ③ 更新过程是简单计数过程

(同一时刻最多只发生一个来到) 的充要条件是 $F(0) = 0$.



第二节 $N(t)$ 的分布与更新函数

设 X_n 共同的分布函数为 F , F_n 为 F 的 n 重卷积.

(N 的理论分布)

对任意 $t \geq 0$,

$$\mathbb{P}(N(t) = n) = F_n(t) - F_{n+1}(t), \quad n \geq 1.$$

证.

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(N(t) = n) &= \mathbb{P}(S_n \leq t < S_{n+1}) \\ &= \mathbb{P}(S_n \leq t) - \mathbb{P}(S_{n+1} \leq t) \\ &= F_n(t) - F_{n+1}(t).\end{aligned}$$



称 $m(t) := \mathbb{E}N(t)$ 为更新过程 N 的更新函数.

命题 5.2.1

对任意 $t \geq 0$,

$$m(t) = \sum_{n=1}^{\infty} F_n(t) < \infty.$$

证. 第一部分:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[N(t)] &= \mathbb{E}\left[\sum_{n \geq 1} 1_{\{S_n \leq t\}}\right] \\ &= \sum_{n \geq 1} \mathbb{P}(S_n \leq t) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} F_n(t).\end{aligned}$$



证. 第二部分: 由

$$\mathbb{P}(X_n = 0) < 1 \Rightarrow \mathbb{P}(X_n > 0) = 1 - \mathbb{P}(X_n = 0) > 0,$$

存在 $\alpha > 0$ 使得 $\mathbb{P}(X_n \geq \alpha) > 0$. 定义过程 $\{\bar{X}_n, n \geq 1\}$:

$$\bar{X}_n = \begin{cases} 0, & X_n < \alpha, \\ \alpha, & X_n \geq \alpha. \end{cases}$$

令

$$\bar{N}(t) := \sup_n \{\bar{X}_1 + \cdots + \bar{X}_n \leq t\},$$

则



$\{\bar{N}(t), t \geq 0\}$ 是只在 $t = n\alpha$ 时刻发生更新的更新次数,
每次更新均为独立的参数为 $\mathbb{P}(X_n \geq \alpha)$ 的几何分布随机变量.
从而利用 Pascal 分布(定义见下页)的性质,

$$\mathbb{E}[\bar{N}(t)] = \frac{\left[\frac{t}{\alpha}\right]}{\mathbb{P}(X_n \geq \alpha)} \leq \frac{\left(\frac{t}{\alpha} + 1\right)}{\mathbb{P}(X_n \geq \alpha)} < \infty.$$

而 $\bar{X}_n \leq X_n$, 故有

$$N(t) \leq \bar{N}(t), \quad \forall t \geq 0.$$



● 实际也证明,

$$\text{对任意 } t \geq 0, r \geq 0, \mathbb{E}[N(t)^r] < \infty.$$



Pascal 分布.

[帕斯卡分布] 在成功的概率为 p 的伯努利试验中, 若以 ζ 记第 r 次成功出现时的试验次数, 则 ζ 是随机变量, 取值 $r, r+1, \dots$ 其概率分布为帕斯卡分布:

$$P\{\zeta = k\} = \binom{k-1}{r-1} p^r q^{k-r}, \quad k = r, r+1, \dots \quad (3.1.19)$$

这分布在上章 §3 出现过. 显然当 $r=1$ 时, 即为几何分布.

另一方面若以 η_i 记从第 $i-1$ 次成功之后的第一次试验算起至第 i 次成功为止共进行的试验次数, 则 η_i 服从几何分布 (3.1.18), 而且

$$\zeta = \eta_1 + \dots + \eta_r, \quad (3.1.20)$$



注意: 由数学归纳法, $F_n(t) \leq (F(t))^n$.

推论 5.2.1

对任意 $t \geq 0$, $F(t) < 1$,

$$m(t) \leq \frac{F(t)}{1 - F(t)}.$$



第三节 极限定理与停时

考虑更新过程 $\{N(t), t \geq 0\}$.

$N(\infty) = \lim_{t \rightarrow \infty} N(t)$: 表示总的更新次数. 可以证明

$$\mathbb{P}(N(\infty) = \infty) = 1.$$

事实上,

$$\begin{aligned} 0 &\leq \mathbb{P}(N(\infty) < \infty) = \mathbb{P}(\exists n, X_n = \infty) \\ &\leq \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(X_n = \infty) = 0. \end{aligned}$$



问题: · $N(t)$ 趋于无穷的速度是多少?
· $N(t)$ 的渐近行为有何结果?

命题 5.3.1

$$\mathbb{P}\left(\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} N(t) = \frac{1}{\mu}\right) = 1.$$



证. $S_{N(t)}$: 在 t 之前或 t 时刻最后一次更新的时刻,
 $S_{N(t)+1}$: t 时刻之后第一次更新的时刻.
即

$$S_{N(t)} \leq t < S_{N(t)+1},$$

由强大数律有

$$\frac{S_{N(t)}}{N(t)} \leq \frac{t}{N(t)} < \frac{S_{N(t)+1}}{N(t)} = \frac{S_{N(t)+1}}{N(t)+1} \cdot \frac{N(t)+1}{N(t)} \xrightarrow{a.s.} \mu.$$

得证.

以概率 1, 长时间后更新发生的速率为 $1/\mu$.

通常, 称 $1/\mu$ 为更新过程的速率/强度.



例 5.3.1. 小明使用一台单电池收音机. 一旦电池失效就去买一节新的换上. 假设电池寿命(小时)服从 $U(30, 60)$, 买电池的时间服从 $U(0, 1)$. 问小明更换电池的平均速率是多少? 并说明理论依据.

解. 每次更换一节新电池称为一次更新. 则

$$\mu = \mathbb{E}U_1 + \mathbb{E}U_2 = 45 + 0.5 = 91/2,$$

其中 $U_1 \sim U(30, 60)$, $U_2 \sim U(0, 1)$,
所以从长远来看, 小明以速率 $2/91$ 更换新电池,
即平均每91小时换两节电池.

#



例 5.3.2 假设潜在顾客按速率为 λ 的 Poisson 过程来到只有一个服务窗口的银行. 然而假设潜在顾客只当服务窗口有空时才进入银行, 即如果在银行中已经有一个顾客, 那么后来者并不进入银行而是转身离开. 如果我们假定进入银行的顾客在银行停留的时间是一个具有分布 G 的随机变量, 那么

- (1) 顾客进入银行的速率是多少?
- (2) 潜在的顾客确实进入银行的比例是多少?



解. (1) 进入的顾客之间的间隔时间的均值是

$$\mu = \mu_G + \frac{1}{\lambda},$$

所以进入银行的顾客的速率是

$$\frac{1}{\mu} = \frac{\lambda}{1 + \lambda\mu_G}.$$

(2) 由潜在的顾客以速率 λ 到达 \Rightarrow 进入银行的顾客比例是

$$\frac{\lambda/(1 + \lambda\mu_G)}{\lambda} = \frac{1}{1 + \lambda\mu_G}.$$

#



下面为研究 $m(t)$ 及

$$\frac{m(t)}{t} = \mathbb{E}\left[\frac{N(t)}{t}\right]: \text{更新的平均速度}$$

的渐近性质, 先引入停时的概念.

定义 5.3.1: (离散型的停时)

设 N 为非负整数值随机变量, X_1, X_2, \dots 为任意随机变量序列, 若对任意 $n = 1, 2, \dots$,

$$\{N = n\} \text{ 关于 } \sigma(X_1, X_2, \dots, X_n) \text{ 可测,}$$

则称 N 为关于 $\{X_n\}$ 的停时/Markov 时间.



最优停时理论是概率论的新分支, 停时可用于寻找最优停止策略.

例 5.3.4 (a) 假设 X_1, X_2, \dots i.i.d.:

$$\mathbb{P}(X_n = 0) = \mathbb{P}(X_n = 1) = \frac{1}{2}.$$

$N := \min\{n : X_1 + \dots + X_n = 10\}$ 是停时.

(b) 假设 X_1, X_2, \dots i.i.d.:

$$\mathbb{P}(X_n = -1) = \mathbb{P}(X_n = 1) = \frac{1}{2}.$$

$N := \min\{n : X_1 + \dots + X_n = 1\}$ 也为停时.

#



定理 5.3.1: (Wald 等式)

设 $\{X_n, n \geq 1\}$ 为独立同分布的可积随机变量序列,
 N 为关于 $\{X_n, n \geq 1\}$ 的停时且 $\mathbb{E}N < \infty$, 则

$$\mathbb{E} \sum_{n=1}^N X_n = \mathbb{E}N \cdot \mathbb{E}X_1.$$



证. 因为 $\sum_{n=1}^N X_n = \sum_{n=1}^{\infty} X_n \cdot 1_{\{N \geq n\}}$, 由 Lebesgue 控制收敛定理,

$$\mathbb{E}\left[\sum_{n=1}^N X_n\right] = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{E}[X_n 1_{\{N \geq n\}}].$$

因为 X_n 与 $\{N \geq n\}$ 独立, 事实上,

$$\{N \geq n\} = \{N < n\}^c = (\{N = 1\} \cup \cdots \cup \{N = n-1\})^c.$$

所以

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left[\sum_{n=1}^N X_n\right] &= \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{E}[X_n] \mathbb{E}[1_{\{N \geq n\}}] \\ &= \mathbb{E}X_1 \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(N \geq n) = \mathbb{E}N \cdot \mathbb{E}X_1. \end{aligned}$$



例 5.3.4 (续):

- (a) 假设 X_1, X_2, \dots i.i.d.: $\mathbb{P}(X_n = 0) = \mathbb{P}(X_n = 1) = \frac{1}{2}$.
 对于停时 $N := \min\{n : X_1 + \dots + X_n = 10\}$,

$$10 = \mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^N X_i\right] = \frac{1}{2}\mathbb{E}[N] \Rightarrow \mathbb{E}[N] = 20.$$

- (b) 假设 X_1, X_2, \dots i.i.d.: $\mathbb{P}(X_n = -1) = \mathbb{P}(X_n = 1) = \frac{1}{2}$.
 对于停时 $N := \min\{n : X_1 + \dots + X_n = 1\}$,

$$1 = \mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^N X_i\right] \neq \mathbb{E}[X_1]\mathbb{E}[N] = 0.$$

实际上, 这里的 N 其期望 $\mathbb{E}[N] = \infty$.

#



设 $\{X_n, n \geq 1\}$: 更新过程 $\{N(t), t \geq 0\}$ 的来到间隔序列.
 由 Wald 等式, 有如下推论.

推论 5.3.1

若 $\mu = \mathbb{E}X_1 < \infty$, 则

$$\mathbb{E}\left[\sum_{n=1}^{N(t)+1} X_n\right] = \mathbb{E}X \cdot \mathbb{E}[N(t) + 1] = \mu(m(t) + 1).$$



证. 只需证 $N(t) + 1$ 是关于序列 $\{X_t\}$ 的停时即可.
事实上, $N(t) + 1 = n$ 等价于

$$X_1 + \cdots + X_{n-1} \leq t \text{ 且 } X_1 + \cdots + X_n > t.$$

所以, $\{N(t) + 1 = n\}$ 只依赖于 X_1, \dots, X_n 而与 X_{n+1}, X_{n+2}, \dots 无关. □



下面的结果说明, 平均更新频率趋向于平均更新周期的倒数, 简单地说, 频率是周期的倒数.

定理 5.3.2: (基本更新定理)

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} m(t) = \frac{1}{\mu} \quad (\text{设 } \frac{1}{\infty} = 0).$$

证明. \diamond 先考虑 $\mu < \infty$ 的场合.

由于 $S_{N(t)+1} > t$, 由上述推论有 $\mu(m(t) + 1) > t$,

$$\liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} m(t) \geq \frac{1}{\mu}.$$



另一方面, 固定常数 M , 定义“截尾更新过程” $\{\bar{X}_n, n \geq 1\}$:

$$\bar{X}_n := \begin{cases} X_n, & X_n \leq M, \\ M, & X_n > M. \end{cases}$$

令

$$\bar{S}_n := \sum_{i=1}^n \bar{X}_i, \quad \bar{N}(t) := \sup\{n : \bar{S}_n \leq t\},$$

注意到, $\bar{S}_{\bar{N}(t)+1} \leq t + M$, 由上述推论, 有

$$(\bar{m}(t) + 1)\bar{\mu} \leq t + M,$$

其中 $\bar{\mu} := \mathbb{E}[\bar{X}_n]$. 所以

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \bar{m}(t) \leq \frac{1}{\bar{\mu}}.$$



而

$$\bar{S}_n \leq S_n \Rightarrow \bar{N}(t) \geq N(t)$$

且 $\bar{m}(t) \geq m(t)$. 所以

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} m(t) \leq \frac{1}{\mu}.$$

令 $M \rightarrow \infty$, 则

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} m(t) \leq \frac{1}{\mu}.$$



◇ 当 $\mu = \infty$ 时, 仍考虑 $\overline{N}(t)$. 因为

$$M \rightarrow \infty \text{ 时, } \bar{\mu} \rightarrow \infty,$$

所以

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} m(t) \leq 0, \text{ 即 } \limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} m(t) = 0.$$

我们有

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} m(t) = 0.$$



例 5.3.5 设 U 为 $(0, 1)$ 上均匀分布随机变量, 对 $n = 1, 2, \dots$ 定义

$$Y_n := \begin{cases} 0, & U > \frac{1}{n}, \\ n, & U \leq \frac{1}{n}, \end{cases}$$

则 $\mathbb{P}(Y_n \rightarrow 0, \text{ 当 } n \rightarrow \infty \text{ 时}) = 1$, 但

$$\mathbb{E} Y_n = n\mathbb{P}(U \leq \frac{1}{n}) = 1 \neq 0.$$

#



注释

对于马氏链 $\{X_n, n \geq 0\}$, 如果 $i, j \in E$ 相通的常返态, 则

$$\lim_n \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n P_{ij}^{(k)} = \frac{1}{\mathbb{E}[\tau_j]}.$$

设

$$N_n := \sum_{k=1}^n 1_{\{X_k=j\}} : n \text{ 时刻之前访问 } j \text{ 的次数}.$$

基本更新定理

$$\lim_n \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n P_{ij}^{(k)} = \lim_n \frac{\mathbb{E}^i[N_n]}{n} = \frac{1}{\mathbb{E}^j[\tau_j]}.$$

